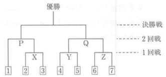
①

A, B, C, D, E, F, G の7チームが右のようなトーナメント形式の大会を行うことになった。

各チームは，今後行われる抽選により，1番から7番までの枠に割り当てられる。



(1) この大会の1回戦の組合せの総数について考えてみよう。

7つの枠に，7チームを単純に当てはめる場合の数は［ア］で表せる。

しかし，このトーナメント表では，2番と3番のように，入れ替わっても1回戦が同じ対戦になる枠も存在する。同様に，2回戦に注目すると，［イ］と［ウ］が入れ替わっても組合せは同じになる。

したがって，この大会の1回戦の組合せの総数は，［ア］を［エ］で割ることで求めることができる。

［ア］の解答群

⓪ 7　① $4!\times3!$　② $_7C_7$　③ $_7P_7$　④ $_4P_4$

［イ］，［ウ］の解答群（解答の順序は問わない。）

⓪ Pブロック　① Qブロック　② Xブロック
③ Yブロック　④ Zブロック　⑤ 1番の枠

［エ］の解答群

⓪ 2^2　① 2×3　② 2^3　③ 2^4　④ $2^3\times3$

(2) この大会の1回戦の組合せの総数は，組合せの考え方を用いて求めることもできる。

まず［オ］番の枠に入る1チームを選び，次に［カ］ブロックに入る2チームを選ぶと，残りの4チームは［α］ブロックと［β］ブロックが入れ替わっても同じ対戦になる。

このことに注意して組合せの総数を求めると，［キクケ］通りとなる。

［カ］の解答群（［α］と［β］には，それ以外の2つのブロックが入る。）

⓪ X　① Y　② Z

(3) Aチームの太郎さんとBチームの花子さんは，この大会でお互いが1回戦で対戦する確率について話している。

太郎：Xブロックの1回戦でAチームとBチームが対戦する確率は $\frac{1}{\boxed{コサ}}$ だよね。

花子：じゃあ，1回戦で私たちが対戦する確率は $\frac{\boxed{シ}}{\boxed{ス}}$ だね。

(4) 太郎さんは(3)の会話の後，A，Bの各チームが他のチームに勝つ確率を仮定して，優勝チームに関する様々な推測を行った。

<太郎さんの推測>

AチームとBチームが他のチームに勝つ確率は，右の表の通りであるとする。

	1回戦	2回戦	決勝戦
A	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$
B	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

Aチームの優勝する確率は，Aチームが［セ］に入ったとき［ソ］となり，それ以外のブロックに入ったとき［タ］となる。

同様に，Bチームの優勝する確率は，［セ］に入ったとき［チ］となり，それ以外のブロックに入ったとき［ツ］となる。

以上を組み合わせると，Aチームの優勝する確率は［テ］，Bチームの優勝する確率は［ト］であるとわかる。

また，Aチームが優勝したとき，Aチームが1番の枠であった条件付き確率は［ナ］である。

［セ］の解答群

⓪ Xブロック　① Yブロック　② Zブロック　③ 1番の枠

［ソ］〜［ナ］の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい。）

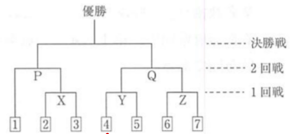
⓪ $\frac{1}{3}$　① $\frac{2}{3}$　② $\frac{1}{2}$　③ $\frac{1}{6}$　④ $\frac{1}{9}$
⑤ $\frac{4}{9}$　⑥ $\frac{5}{9}$　⑦ $\frac{1}{4}$　⑧ $\frac{1}{7}$　⑨ $\frac{5}{42}$

[解]

① → ⑦

(1) $7! = \boxed{③}$ ア

YとZが入れかえOK $\boxed{③, ④}$ イウ



同じ(2通り) E F / F E × A B C D / A B D C / B A C D / B A D C / C D A B / C D B A / D C A B / D C B A　すべて同じ(8通り)

よって1つのパターンにつき $2\times8=16$ 通りダブる

よって $7!$ を 2^4 で割れば良い $\boxed{③}$ エ

$7!\div16$ (= 315通り)

(2) ① オ　次にXのブロックに入る人 $\boxed{⓪}$ カ

残り4チームをY, Zブロック

$$_7C_1 \times {}_6C_2 \times \frac{{}_4C_2 \times ({}_2C_2)}{2!} = 7\times15\times3 = \boxed{315} \text{通り}$$ キクケ

(3) A, Bの選び方に注目するとすべての選び方は $_7C_2$

その内A, Bが2つともXに入るのは　求める確率 $\frac{1}{_7C_2} = \boxed{\frac{1}{21}}$ コサ

2つを選ぶ

①〜⑦より2つ選ぶ

Y, Zについても同様より $3\times\frac{1}{21} = \boxed{\cancel{\frac{3}{21}}}$ シス　$\boxed{\frac{1}{7}}$

$$\frac{\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{7}} = \frac{1}{3}\ \boxed{⓪}$$ ナ

(4) Aチームが①に入ったとき $\boxed{③}$ セ

2回戦，3回戦で勝てば良い（1回戦は不戦勝）

よって優勝する確率は

$\frac{1}{2}\times\frac{2}{3} = \frac{1}{3}\ \boxed{⓪}$ ソ

それ以外(X, Y, Z)のときは3回勝つ必要があるので

1〜3回戦

$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3} = \frac{1}{9}\ \boxed{④}$ タ

Bチームが①に入ったとき

$\frac{1}{2}\times\frac{1}{3} = \frac{1}{6}\ \boxed{③}$ チ

それ以外

$\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3} = \frac{1}{9}\ \boxed{④}$ ツ

・Aが優勝　テ

① X, Y, Z

$\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{3} + \frac{6}{7}\cdot\frac{1}{9} = \frac{1}{7}\ \boxed{⑧}$

・Bが優勝　ト

① X, Y, Z

$\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{6} + \frac{6}{7}\cdot\frac{1}{9} = \frac{5}{42}\ \boxed{⑨}$

②

$\angle ACB=90^\circ$ である直角三角形 ABC と，その辺上を移動する 3 点 P，Q，R がある。点 P，Q，R は，次の規則に従って移動する。

・最初，点 P，Q，R はそれぞれ点 A，B，C の位置にあり，点 P，Q，R は同時刻に移動を開始する。
・点 P は辺 AC 上を，点 Q は辺 BA 上を，点 R は辺 CB 上を，それぞれ向きを変えることなく，一定の速さで移動する。ただし，点 P は毎秒 1 の速さで移動する。
・点 P，Q，R は，それぞれ点 C，A，B の位置に同時刻に到達し，移動を終了する。

次の問いに答えよ。

(1) 図 1 の直角三角形 ABC を考える。

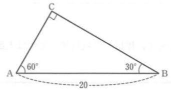


図 1

(i) 各点が移動を開始してから 2 秒後の線分 PQ の長さと三角形 APQ の面積 S を求めると

PQ= ア $\sqrt{\text{イウ}}$，S= エ $\sqrt{\text{オ}}$ となる。

(ii) 各点が移動する間の線分 PR の長さとして
とり得ない値は カ
一回だけとり得る値は キ ， ク
二回だけとり得る値は ケ ， コ
である。ただし，移動には出発点と到達点も含まれるものとする。

カ ～ コ の解答群
（ キ と ク ， ケ と コ についてはそれぞれ解答の順序を問わない。）

⓪ $5\sqrt{2}$	① $5\sqrt{3}$	② $4\sqrt{5}$	③ 10	④ $10\sqrt{3}$
≒7	8.5	8.9	10	17

(iii) 各点が移動する間における三角形 APQ，三角形 BQR，三角形 CRP の面積をそれぞれ S_1，S_2，S_3 とする。各時刻における S_1，S_2，S_3 の間の大小関係について述べた文として正しいものは サ である。

サ の解答群

⓪ 最初は $S_1<S_2<S_3$ で，$S_1=S_2=S_3$ を経て $S_1>S_2>S_3$ となる。
① 最初は $S_1>S_2>S_3$ で，$S_1=S_2=S_3$ を経て $S_1<S_2<S_3$ となる。
② 最初は $S_1<S_2<S_3$ で，移動を終了したときに $S_1=S_2=S_3$ となる。
③ 最初は $S_1>S_2>S_3$ で，移動を終了したときに $S_1=S_2=S_3$ となる。
④ 時刻に関係なく $S_1<S_2<S_3$ である。
⑤ 時刻に関係なく $S_1=S_2=S_3$ である。
⑥ 時刻に関係なく $S_1>S_2>S_3$ である。

(2) 直角三角形 ABC の辺の長さを右の図 2 のように変えたとき，三角形 PQR の面積が 12 となるのは，各点が移動を開始してから何秒後かを求めると

$\dfrac{\text{シス} \pm \text{セ}\sqrt{\text{ソ}}}{\text{タ}}$ 秒後 となる。

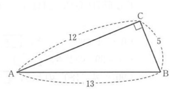
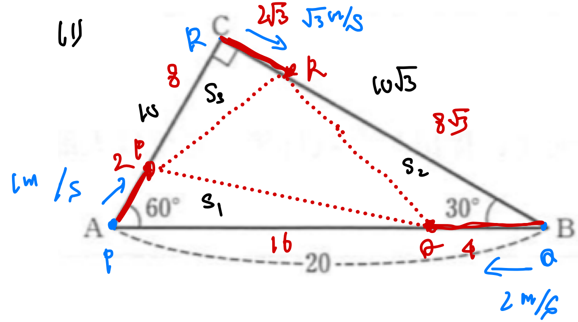


図 2

(1)



(i)

(i) $PQ^2 = 2^2 + 16^2 - 2\cdot 2\cdot 16\cdot \cos 60 = 228$ 　 $PQ = \sqrt{228} = \boxed{2\sqrt{57}}$ アイウ

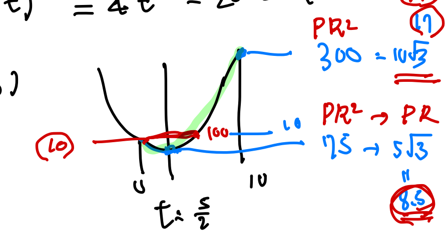
$S = \frac{1}{2}\, 2\cdot 16 \sin 60 = \boxed{8\sqrt{3}}$ エオ

△CPR (三平方)

(ii) $\boxed{PR^2 = PC^2 + CR^2} = (10-t)^2 + (\sqrt{3}t)^2 = 4t^2 - 20t + 100$ 　PR 17

t秒後

$= 4(t - \frac{5}{2})^2 + 75$ 　 $(0 \le t \le 10)$



・とり得ない $\boxed{0}$ カ

・1回 $\boxed{① ④}$ キク

2回 $\boxed{② ③}$ ケコ

②

∠ACB=90° である直角三角形 ABC と，その辺上を移動する 3 点 P，Q，R がある。点 P，Q，R は，次の規則に従って移動する。

- 最初，点 P，Q，R はそれぞれ点 A，B，C の位置にあり，点 P，Q，R は同時刻に移動を開始する。
- 点 P は辺 AC 上を，点 Q は辺 BA 上を，点 R は辺 CB 上を，それぞれ向きを変えることなく，一定の速さで移動する。ただし，点 P は毎秒 1 の速さで移動する。
- 点 P，Q，R は，それぞれ点 C，A，B の位置に同時刻に到達し，移動を終了する。

次の問いに答えよ。

(1) 図 1 の直角三角形 ABC を考える。

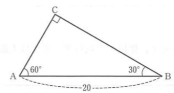


図 1

(i) 各点が移動を開始してから 2 秒後の線分 PQ の長さと三角形 APQ の面積 S を求めると

PQ= ア $\sqrt{\text{イウ}}$，S= エ $\sqrt{\text{オ}}$ となる。

(ii) 各点が移動する間の線分 PR の長さとして
とり得ない値は カ
一回だけとり得る値は キ，ク
二回だけとり得る値は ケ，コ
である。ただし，移動には出発点と到達点も含まれるものとする。

カ ～ コ の解答群
（ キ と ク，ケ と コ についてはそれぞれ解答の順序を問わない。）

⓪ $5\sqrt{2}$	① $5\sqrt{3}$	② $4\sqrt{5}$	③ 10	④ $10\sqrt{3}$
7	8.5	8.9	10	17

(iii) 各点が移動する間における三角形 APQ，三角形 BQR，三角形 CRP の面積をそれぞれ S_1，S_2，S_3 とする。各時刻における S_1，S_2，S_3 の間の大小関係について述べた文として正しいものは サ である。

サ の解答群

⓪ 最初は $S_1<S_2<S_3$ で，$S_1=S_2=S_3$ を経て $S_1>S_2>S_3$ となる。
① 最初は $S_1>S_2>S_3$ で，$S_1=S_2=S_3$ を経て $S_1<S_2<S_3$ となる。
② 最初は $S_1<S_2<S_3$ で，移動を終了したときに $S_1=S_2=S_3$ となる。
③ 最初は $S_1>S_2>S_3$ で，移動を終了したときに $S_1=S_2=S_3$ となる。
④ 時刻に関係なく $S_1<S_2<S_3$ である。
⑤ 時刻に関係なく $S_1=S_2=S_3$ である。
⑥ 時刻に関係なく $S_1>S_2>S_3$ である。

(2) 直角三角形 ABC の辺の長さを右の図 2 のように変えたとき，三角形 PQR の面積が 12 となるのは，各点が移動を開始してから何秒後かを求めると

$\dfrac{\text{シス} \pm \text{セ}\sqrt{\text{ソ}}}{\text{タ}}$ 秒後　となる。

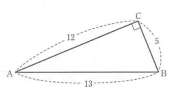
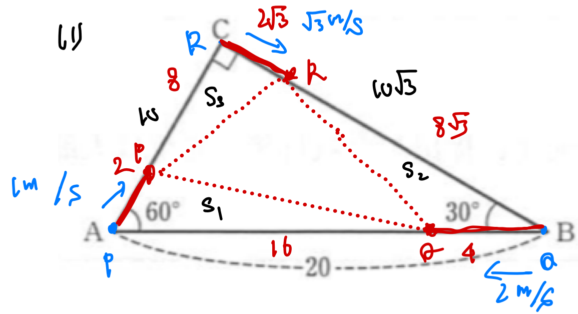


図 2

(i)



(iii) t 秒後

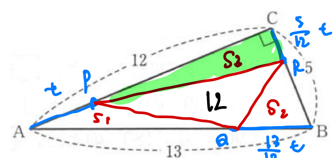
$S_1 = \frac{1}{2} t(20-2t)\sin 60 = \frac{\sqrt{3}}{2} t(10-t)$

$S_2 = \frac{1}{2}(10\sqrt{3}-\sqrt{3}t)\cdot 2t\cdot\sin 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} t(10-t)$

$S_3 = \frac{1}{2}(10-t)\cdot\sqrt{3}t = \frac{\sqrt{3}}{2} t(10-t)$

よって $S_1 = S_2 = S_3$ $\boxed{⑤}$ サ

(2)



(1)と同様に考えると $S_1 = S_2 = S_3$

$S_3 = \frac{1}{2}(12-t)\frac{5t}{12} = \frac{5}{24}t(12-t)$

よって $S_3 = \frac{1}{3}(30-12) = 6$ より

$\frac{5}{24}t(12-t) = 6$

$5t^2 - 60t + 144 = 0$

$t = \boxed{\dfrac{30 \pm 6\sqrt{5}}{5}}$

シスセソタ

△ABC−△PQR