① $a=\sin^2\dfrac{\pi}{5}$, $b=\sin^2\dfrac{2\pi}{5}$ とおく。このとき，以下のことが成り立つことを示せ。

(1) $a+b$ および ab は有理数である。

(2) 任意の自然数 n に対し，$(a^{-n}+b^{-n})(a+b)^n$ は整数である。

(解)

(1) $\theta=\dfrac{\pi}{5}$ とおくと

$a=\sin^2\theta$

$b=\sin^2 2\theta=(2\sin\theta\cos\theta)^2$

$=4\sin^2\theta\cos^2\theta=4\sin^2\theta(1-\sin^2\theta)$

よって $\sin^2\theta$の値を求めれば良い

$5\theta=\pi$ より

$2\theta=\pi-3\theta$

$\sin 2\theta=\sin(\pi-3\theta)$

$=\sin 3\theta$

$2\sin\theta\cos\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta$

$\sin\theta>0$ より

両辺を$\sin\theta$で割って

$2\cos\theta=3-4\sin^2\theta$

$=3-4(1-\cos^2\theta)$

$\therefore\ 4\cos^2\theta-2\cos\theta-1=0$

$\cos\theta=\dfrac{1\pm\sqrt{1+4}}{4}$

$\cos\theta>0$ より $\cos\theta=\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$

$a=\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2$

$=\dfrac{5-\sqrt{5}}{8}$

$b=4\sin^2\theta(1-\sin^2\theta)=4\left(\dfrac{5-\sqrt{5}}{8}\right)\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{8}\right)$

$=\dfrac{5+\sqrt{5}}{8}$

よって

$a+b=\left(\dfrac{5-\sqrt{5}}{8}\right)+\dfrac{5+\sqrt{5}}{8}=\boxed{\dfrac{5}{4}}$

$ab=\left(\dfrac{5-\sqrt{5}}{8}\right)\left(\dfrac{5+\sqrt{5}}{8}\right)$

$=\dfrac{25-5}{64}=\boxed{\dfrac{5}{16}}$

よって $a+b$, ab は共に有理数

① $a=\sin^2\frac{\pi}{5}$，$b=\sin^2\frac{2\pi}{5}$ とおく。このとき，以下のことが成り立つことを示せ。

(1) $a+b$ および ab は有理数である。

(2) 任意の自然数 n に対し，$(a^{-n}+b^{-n})(a+b)^n$ は整数である。

帰納法

(2)

$P_n=(a^{-n}+b^{-n})(a+b)^n$ とおくと

$=\left(\frac{1}{a^n}+\frac{1}{b^n}\right)(a+b)^n$

$=\frac{a^n+b^n}{a^n b^n}(a+b)^n$

$=(a^n+b^n)\left(\frac{a+b}{ab}\right)^n$

(1)より $\begin{cases} a+b=\frac{5}{4} \\ ab=\frac{5}{16} \end{cases}$ より

$=(a^n+b^n)\left(\frac{\frac{5}{4}}{\frac{5}{16}}\right)^n$

$=(a^n+b^n)\cdot 4^n=\{(4a)^n+(4b)^n\}$

ここで $\begin{cases} 4a=\alpha \\ 4b=\beta \end{cases}$ とおくと

$P_n=\alpha^n+\beta^n$ …①

よって ①が整数であることを示す …(☆)

(I) $n=1, 2$ のとき

$\begin{cases} \alpha+\beta=4a+4a=4(a+b)=4\cdot\frac{5}{4}=\boxed{5} \\ \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=5^2-2(4a)(4b) \end{cases}$

$=25-2\cdot16\cdot ab=25-2\cdot16\cdot\frac{5}{16}$

$=25-2\cdot5=\boxed{15}$

よって (☆)は成り立つ

(II) $n=k, k+1$ のとき

(☆)が成り立つと仮定する

$\alpha^k+\beta^k$，$\alpha^{k+1}+\beta^{k+1}$ は

整数

$n=k+2$ のとき

$\alpha^{k+2}+\beta^{k+2}$

$=(\alpha+\beta)(\alpha^{k+1}+\beta^{k+1})$

$-\alpha\beta^{k+1}-\alpha^{k+1}\beta$

$=\underbrace{(\alpha+\beta)}_{5}\underbrace{(\alpha^{k+1}+\beta^{k+1})}_{仮}$

$-\underbrace{\alpha\beta}_{15}\underbrace{(\alpha^k+\beta^k)}_{仮定}$

$=$ 整

$\begin{cases} \because \alpha+\beta, \alpha\beta \in 整 \\ 仮定より \end{cases}$

$\therefore$ $n=k+2$ のときも (☆)は成り立つ

(I)(II)より すべての自然数 n で (☆)は示された。

② O を原点とする空間内に 3 点 A(4, 0, 0), B(1, 4, −1), C(3, 1, 2) をとる。四面体 OABC において線分 OA 上の点 P および線分 BC 上の点 Q を PQ ⊥ OA かつ PQ ⊥ BC となるようにとる。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とする。

(1) $\overrightarrow{OP}$ および $\overrightarrow{OQ}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ。

(2) △OAQ の面積を求めよ。

(3) 四面体 OABQ の体積を求めよ。

(解) $\vec{a}=(4,0,0)$, $\vec{b}=(1,4,-1)$, $\vec{c}=(3,1,2)$

PはOA上より

$\overrightarrow{OP}=k\vec{a}=(4k,0,0)$ —① (k: 実数)

QはBC上より

$$\overrightarrow{OQ}=(1-t)\vec{b}+t\vec{c}=(1-t)\begin{pmatrix}1\\4\\-1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1-t+3t\\4-4t+t\\-1+t+2t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2t+1\\-3t+4\\3t-1\end{pmatrix} \text{ —②}$$

$$\overrightarrow{PQ}=\begin{pmatrix}2t+1-4k\\-3t+4\\3t-1\end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{PQ}\perp\overrightarrow{OA}$ より

$\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{a}=0$ $\quad\therefore \begin{pmatrix}2t-4k+1\\-3t+4\\3t-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix}=0$ $\quad\therefore 4(2t-4k+1)=0$

$\therefore 2t-4k+1=0$ …③

$\overrightarrow{PQ}\perp\overrightarrow{BC}$ より

$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{BC}=0$

$$\begin{pmatrix}2t-4k+1\\-3t+4\\3t-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\-3\\3\end{pmatrix}=0$$

$4t-8k+2+9t-12+9t-3=0$

$22t-8k-13=0$ …④

③, ④ より

$$\begin{cases}k=\dfrac{2}{3}\\[2mm] t=\dfrac{5}{6}\end{cases}$$

よって

①, ② へ代入して

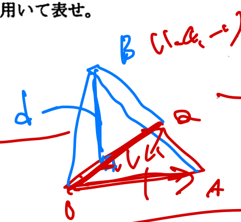
$$\boxed{\begin{aligned}\overrightarrow{OP}&=\frac{2}{3}\vec{a}\\ \overrightarrow{OQ}&=\frac{1}{6}\vec{a}+\frac{5}{6}\vec{b}\end{aligned}}$$

② O を原点とする空間内に 3 点 A(4, 0, 0), B(1, 4, −1), C(3, 1, 2) をとる。四面体 OABC において線分 OA 上の点 P および線分 BC 上の点 Q を PQ ⊥ OA かつ PQ ⊥ BC となるようにとる。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とする。

(1) $\overrightarrow{OP}$ および $\overrightarrow{OQ}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ。

(2) △OAQ の面積を求めよ。

(3) 四面体 OABQ の体積を求めよ。



(2) $\overrightarrow{OA}=(4,0,0)$

①より $\overrightarrow{OQ}=\left(\frac{8}{3}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$

$|\overrightarrow{OA}|=4,\quad |\overrightarrow{OQ}|=\sqrt{\frac{64}{9}+\frac{9}{4}+\frac{9}{4}}=\sqrt{\frac{209}{18}}$

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OQ}=\frac{32}{3}$

$\triangle OAQ=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2|\overrightarrow{OB}|^2-(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OQ})^2}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{16\cdot\frac{209}{18}-\left(\frac{32}{3}\right)^2}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{8\cdot 209}{9}-\frac{32^2}{9}}$

$=\frac{1}{6}\sqrt{1672-1024}$

$=\frac{1}{6}\sqrt{648}=\frac{1}{6}\sqrt{8\cdot 81}=\frac{9}{6}\cdot 2\sqrt{2}=\boxed{3\sqrt{2}}$

$y-z=0$

(3) 平面 OAQ の面積

$\overrightarrow{OQ}=\frac{1}{6}(16,9,9) \parallel (16,9,9)$

$\overrightarrow{OA}=(4,0,0)$

よって 平面 OAQ に垂直なベクトルを $\vec{n}$ とすると

$\begin{array}{cccc} 4 & 0 & 0 & 4 \\ 16 & 9 & 9 & 16 \end{array}$

$\vec{n}=(0,-36,36)$

$=36(0,-1,1) \parallel (0,-1,1)$

∴ $\vec{n}=(0,-1,1)$ としてよい

(a, b, c)

①のときもしもこれを…

∴ 平面 OAQ の方程式は

$-y+z+d=0$ とおける

これ上に A (4, 0, 0) があるので $d=0$

∴ 平面 OAQ: $-y+z=0$ ∴ $y-z=0$

よって B から

平面 OAQ までの

距離を d とすると

$d=\frac{|4+1|}{\sqrt{1+1}}=\frac{5}{\sqrt{2}}$

∴

四面体 OABQ の体

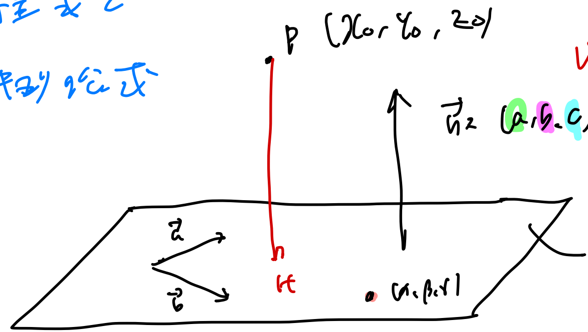
$=\triangle OAQ\times d\times\frac{1}{3}$

$=3\sqrt{2}\times\frac{5}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{3}$

$=\boxed{5}$

平面の方程式と

点と平面の距離公式



法線ベクトル

通る一点 (α, β, γ) がわかると

$$\iff a(x-\alpha)+b(y-\beta)+c(z-\gamma)=0$$

$$\boxed{PH=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$$

$$\begin{cases} \vec{a}=(x_1, y_1, z_1) \\ \vec{b}=(x_2, y_2, z_2) \end{cases}$$

とすると $\vec{n}$ は

(法線ベクトルの出し方)

$$\begin{array}{ccccccccc} \vec{a} & x_1 & & y_1 & & z_1 & & x_1 \\ & & \overset{3}{\times} & & \overset{1}{\times} & & \overset{2}{\times} & \\ \vec{b} & x_2 & & y_2 & & z_2 & & x_2 \end{array}$$

$$\boxed{\vec{n}=(y_1z_2-z_1y_2,\ z_1x_2-x_1z_2,\ x_1y_2-y_1x_2)}=(a, b, c)$$

二次数学　記述のアドバイス

① 字やグラフは丁寧に書く

② 数式の羅列にならないように日本語を書く

③ 筋道立てて論理的に書く(論理の飛躍は大幅減点)

④ 採点者に「読んで頂く手紙」だと思って分かりやすい日本語で書く

⑤ 解けなくても、考えた思考過程をきちんとアピールする。
(ただし、メモなのか答案なのか、区別できるように分かるように書く)

⑥(1)の結果を用いて、(2)を解く場合、仮に(1)が示せなくても、
((1)が示せたとして、以下解く)と一言書いて、結果を用いて解く

⑦ 何も書かなければ0点。
なんでもかんでも書けば良いわけでは無いが、考えられそうな
方針だけでも書いておこう。

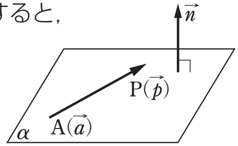
⑧ 大事なのは、一点でももぎ取ろう！という「貪欲な精神」です！

皆さんの健闘をお祈りいたします

Column コラム

「平面の方程式」

まとめ3「平面のベクトル方程式」(p.C1-115) にもあるように，定点 $\mathrm{A}(\vec{a})$ を通り，法線ベクトル $\vec{n}$ に垂直な平面 α 上の任意の点を $\mathrm{P}(\vec{p})$ とすると，



$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\perp\vec{n}$ または $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\vec{0}$ より，$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=0$ だから，

$$\vec{n}\cdot(\vec{p}-\vec{a})=0 \quad \cdots\cdots①$$

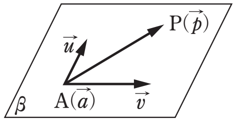
①は，平面 α のベクトル方程式（内積表示）である．

$\vec{n}=(a,\ b,\ c)$，$\mathrm{A}(x_0,\ y_0,\ z_0)$，$\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ とすると，

$$\vec{n}\cdot(\vec{p}-\vec{a})=0 \iff a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0 \quad \cdots\cdots②$$

これを平面 α の方程式（内積表示）という．

さらに，点 $\mathrm{A}(\vec{a})$ を通り，$\vec{u}$，$\vec{v}$ $(\vec{u}\neq\vec{0},\ \vec{v}\neq\vec{0},\ \vec{u}\not\parallel\vec{v})$ で張られる平面を β とすると，β 上の任意の点 $\mathrm{P}(\vec{p})$ は，



$$\vec{p}=\vec{a}+s\vec{u}+t\vec{v}\ \ (s,\ t\ は任意の実数) \quad \cdots\cdots③$$

と表せる．これを平面 β のベクトル方程式（媒介変数表示）という．

では，この③について，x，y，z の方程式で表現することはできないだろうか．

$\vec{p}=(x,\ y,\ z)$，$\vec{a}=(x_0,\ y_0,\ z_0)$，$\vec{u}=(x_1,\ y_1,\ z_1)$，$\vec{v}=(x_2,\ y_2,\ z_2)$ とし，$\vec{u}$，$\vec{v}$ の両方に垂直なベクトルの1つを $\vec{n}=(a,\ b,\ c)$ とする（$\vec{n}$ の求め方は p.C1-108 Story 参照）．この $\vec{n}$ を③の両辺に内積として掛けると，$\vec{n}\cdot\vec{u}=0$，$\vec{n}\cdot\vec{v}=0$ に注意して，　$\vec{n}\cdot\vec{p}=\vec{n}\cdot\vec{a}$

これより，

$$ax+by+cz=ax_0+by_0+cz_0 \iff a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

となり，②と一致する．この式を展開して $-ax_0-by_0-cz_0=d$ とおくと，

$$ax+by+cz+d=0 \quad \cdots\cdots④$$

となる．これを平面の方程式（一般形）という．

④は，平面に垂直な法線ベクトルがわかれば，x，y，z の1次の項が決まることを示している．よって，あとは通る1点さえわかれば平面の方程式が決まる．

②や④の x，y，z の1次式として表される平面の方程式についても知っておくと大変便利なので，①，③と合わせてマスターしておくとよい．

この練習問題については，p.C1-137 例題 C1.70 を解いてみよう．

（補足1）

上で用いた，③の両辺に $\vec{u}$，$\vec{v}$ の両方に垂直なベクトルを掛ける考え方はぜひマスターしておきたい．ちなみに，この考え方を用いて直線の方程式について考えてみよう．

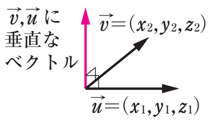
平面における直線で点 $\vec{a}=(x_0,\ y_0)$ を通り方向ベクトルが $\vec{d}=(\ell,\ m)$ の直線は，$\vec{p}=(x,\ y)$ を用いて，$\vec{p}=\vec{a}+t\vec{d}$（t は実数）と表される．ここで，両辺に $\vec{d}$ に垂直なベクトル $\vec{n}=(a,\ b)$ を内積として掛けると，$\vec{n}\cdot\vec{d}=0$ に注意して，
$\vec{n}\cdot\vec{p}=\vec{n}\cdot\vec{a}$ より，　$ax+by=ax_0+by_0$
$-ax_0-by_0=c$ とおくと，$ax+by+c=0$ が導ける．

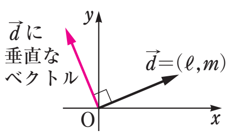
では，空間における直線はどうであろうか．

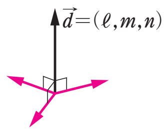
上と同様にして，空間における直線で，点 $\vec{a}=(x_0,\ y_0,\ z_0)$ を通り方向ベクトルが $\vec{d}=(\ell,\ m,\ n)$ の直線は，$\vec{p}=(x,\ y,\ z)$ を用いて，$\vec{p}=\vec{a}+t\vec{d}$（t は実数）と表される．この式の両辺に $\vec{d}$ に垂直なベクトル $\vec{n}=(a,\ b,\ c)$ を掛けたいところであるが，ここで大きな問題がある．

先ほどの③においては，$\vec{u}$ と $\vec{v}$ の両方に垂直なベクトルは１つに決まり（向き，長さは別にして），先で述べた平面における直線においても $\vec{d}$ に垂直なベクトルは１つに決まる．

ところが，空間において $\vec{d}=(\ell,\ m,\ n)$ に垂直なベクトルは１つに決まらない．よって，この方法で表現することはできない．これが，空間における直線の式が $x,\ y,\ z$ の１次式で表せない理由の１つとなっている．（p.C1-131 Column 参照）







（補足２）

平面の方程式については，２つのベクトル方程式 $\vec{n}\cdot(\vec{p}-\vec{a})=0$（内積形），$\vec{p}=\vec{a}+s\vec{u}+t\vec{v}$（媒介変数形）とともに，$ax+by+cz+d=0$（一般形）の形をよく使うのに対して，空間の直線については，ベクトル方程式 $\vec{p}=\vec{a}+t\vec{d}$，またはこれを座標で示した $(x,\ y,\ z)=(x_0,\ y_0,\ z_0)+t(\ell,\ m,\ n)$ の方が圧倒的に使い勝手がよい．

一方，$\dfrac{x-x_0}{\ell}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}$（標準形）は使い勝手が悪い．（ほとんど使わない．）

このように，空間における平面と直線の方程式の扱い方が大きく異なる点に注意したい．

Think

例題 C1.71　2 平面のなす角　＊＊＊＊

2 つの平面

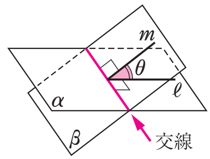
$\alpha : 2x+y-z=3,\ \beta : x-y-2z=3$

について，次の問いに答えよ．

(1)　α，β のなす角 $\theta(0^\circ \leqq \theta \leqq 90^\circ)$ と交線の方程式を求めよ．

(2)　点 A$(3,\ -2,\ 1)$ を通り，2 平面 α，β に垂直な平面 γ の方程式を求めよ．

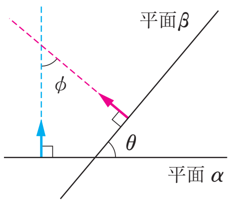
考え方　(1)　平面 α，β のなす角は，平面 α，β 上にある交線に垂直な直線 ℓ，m のなす角である．これは，平面 α，β の法線ベクトルを考えると，下の図のような位置関係になる．



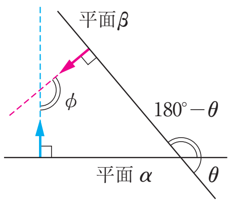
2 本の法線ベクトルのなす角を ϕ とすると，

$0^\circ \leqq \phi \leqq 90^\circ$ のときは，　$\phi=\theta$

$\phi \geqq 90^\circ$ のときは，　$\phi=180^\circ-\theta$　である．



$\phi=\theta$



$\phi=180^\circ-\theta$

交線の方程式を求めるには，平面 α，β の方程式を連立させて，1 つの文字 x について解いて，

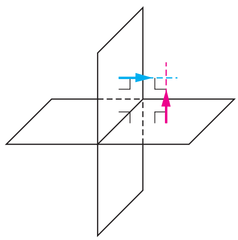
$\quad x=(y\text{ の式})=(z\text{ の式})$

となるようにすればよい．

(2)　2 つの平面が垂直に交わるとき，右の図のように，2 つの平面の法線ベクトルどうしも垂直になる．平面 γ の法線ベクトルを

$\quad \vec{\ell}=(a,\ b,\ c)$

として，$\vec{\ell}$ が平面 α，β の法線ベクトルに垂直であることを利用して $\vec{\ell}$ を定める．



解答　(1)　平面 α，β の法線ベクトルをそれぞれ $\vec{m}$，$\vec{n}$ とすると，

$\vec{m}=(2,\ 1,\ -1)$

$\vec{n}=(1,\ -1,\ -2)$

$\vec{m}$，$\vec{n}$ のなす角を ϕ $(0^\circ \leqq \phi \leqq 180^\circ)$ とすると，

$$\cos\phi=\frac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}||\vec{n}|}$$

$$=\frac{2\cdot1+1\cdot(-1)+(-1)\cdot(-2)}{\sqrt{6}\sqrt{6}}=\frac{1}{2}$$

したがって，$\phi=60^\circ$ より，　$\boldsymbol{\theta=\phi=60^\circ}$

また，平面 α：$2x+y-z=3$　……①，

平面 β：$x-y-2z=3$　……②

の共有点全体が交線であるから，①，②より，

$x=-y+1$，$x=z+2$

よって，**交線の方程式**は，　$\boldsymbol{x=-y+1=z+2}$

◀ $0^\circ \leqq \theta \leqq 90^\circ$

◀ 2 平面が共有する直線を交線という．

◀ ①，②の連立方程式を $x=(y$ の式$)$，$x=(z$ の式$)$ となるように x について解く．

(2)　平面 γ の法線ベクトルを $\vec{\ell}=(a,\ b,\ c)$ $(\vec{\ell}\neq\vec{0})$ とする．

(1)より，平面 α，β の法線ベクトルは

$\vec{m}=(2,\ 1,\ -1)$

$\vec{n}=(1,\ -1,\ -2)$

で，$\vec{\ell}\perp\vec{m}$，$\vec{\ell}\perp\vec{n}$ である．

したがって，

$\vec{\ell}\perp\vec{m}$ より，　$\vec{\ell}\cdot\vec{m}=2a+b-c=0$

$\vec{\ell}\perp\vec{n}$ より，　$\vec{\ell}\cdot\vec{n}=a-b-2c=0$

これより，　$\vec{\ell}=a(1,\ -1,\ 1)$

よって，平面 γ は点 $\mathrm{A}(3,\ -2,\ 1)$ を通るから，平面 γ の方程式は，

$a(x-3)+(-a)\{y-(-2)\}+a(z-1)=0$

ここで，$\vec{\ell}\neq\vec{0}$ より，　$a\neq0$

したがって，　$(x-3)-(y+2)+(z-1)=0$

よって，平面 γ の方程式は，　$\boldsymbol{x-y+z=6}$

◀ $a\neq0$ であることを確認する．

Focus

2 平面のなす角は，平面の法線ベクトルを考える

練習 C1.71 ****

(1)　平面 α：$\sqrt{3}x-4y-9z=6$，平面 β：$x+2\sqrt{3}y+2\sqrt{3}z=2\sqrt{3}$ のなす角 θ と交線の方程式を求めよ．ただし，$0^\circ \leqq \theta \leqq 90^\circ$ とする．

(2)　2 つの平面 α：$3x-z=3$，β：$2x+y-2z=4$ に垂直で，点 $(1,\ -2,\ 3)$ を通る平面 γ の方程式を求めよ．